

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA



UJIAN PROFESI AKTUARIS

MATA UJIAN : A70 – Pemodelan & Teori Risiko
TANGGAL : 27 November 2018
JAM : 13.30 – 16.30

LAMA UJIAN : 180 Menit
SIFAT UJIAN : Tutup Buku

2018

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

TATA TERTIB UJIAN

1. Setiap Kandidat harus berada di ruang ujian selambat-lambatnya 15 (lima belas) menit sebelum ujian dimulai.
2. Kandidat yang datang 1 (satu) jam setelah berlangsungnya ujian dilarang memasuki ruang ujian dan mengikuti ujian.
3. Kandidat dilarang meninggalkan ruang ujian selama 1 (satu) jam pertama berlangsungnya ujian.
4. Setiap kandidat harus menempati bangku yang telah ditentukan oleh Komisi Penguji.
5. Buku-buku, diktat, dan segala jenis catatan harus diletakkan di tempat yang sudah ditentukan oleh Pengawas, kecuali alat tulis yang diperlukan untuk mengerjakan ujian dan kalkulator.
6. Setiap kandidat hanya berhak memperoleh satu set bahan ujian. Kerusakan lembar jawaban oleh kandidat, tidak akan diganti. Dalam memberikan jawaban, lembar jawaban harus dijaga agar tidak kotor karena coretan. Lembar jawaban pilihan ganda tidak boleh diberi komentar selain pilihan jawaban yang benar.
7. Kandidat dilarang berbicara dengan/atau melihat pekerjaan kandidat lain atau berkomunikasi langsung ataupun tidak langsung dengan kandidat lainnya selama ujian berlangsung.
8. Kandidat dilarang menanyakan makna pertanyaan kepada Pengawas ujian.
9. Kandidat yang terpaksa harus meninggalkan ruang ujian untuk keperluan mendesak (misalnya ke toilet) harus meminta izin kepada Pengawas ujian dan setiap kali izin keluar diberikan hanya untuk 1 (satu) orang. Setiap peserta yang keluar tanpa izin dari pengawas maka lembar jawaban akan diambil oleh pengawas dan dianggap telah selesai mengerjakan ujian.
10. Alat komunikasi harus dimatikan selama ujian berlangsung.
11. Pengawas akan mencatat semua jenis pelanggaran atas tata tertib ujian yang akan menjadi pertimbangan diskualifikasi. **Komisi Ujian dan Kurikulum mempunyai hak untuk melarang Kandidat yang didiskualifikasi untuk mengikuti ujian di periode berikutnya.**
12. Kandidat yang telah selesai mengerjakan soal ujian, harus menyerahkan lembar jawaban langsung kepada Pengawas ujian dan tidak meninggalkan lembar jawaban tersebut di meja ujian.
13. Kandidat yang telah menyerahkan lembar jawaban harus meninggalkan ruang ujian.
14. Kandidat dapat mengajukan keberatan terhadap soal ujian yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai kepada komisi penguji selambat-lambatnya 10 (sepuluh) hari setelah akhir periode ujian.

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji
PETUNJUK MENGERJAKAN SOAL

Ujian Pilihan Ganda

1. Setiap soal akan mempunyai 4 (empat) atau 5 (lima) pilihan jawaban di mana hanya 1 (satu) jawaban yang benar.
2. Setiap soal mempunyai bobot nilai yang sama dengan tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.
3. Saudara diminta untuk membaca dan mengikuti petunjuk pengisian yang ada di lembar jawaban.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor peserta, kode dan tanggal ujian pada** tempat yang disediakan dan **tanda tangani lembar jawaban tersebut tanpa menuliskan nama Saudara.**

Ujian Soal Esay

1. Setiap soal dapat mempunyai lebih dari 1 (satu) pertanyaan, Setiap soal mempunyai bobot yang sama kecuali terdapat keterangan pada soal.
2. Tuliskan jawaban Saudara pada Buku Jawaban Soal dengan jelas, rapi dan terstruktur sehingga akan mempermudah pemeriksaan hasil ujian.
3. Saudara bisa mulai dengan soal yang anda anggap mudah dan tuliskan nomor jawaban soal dengan soal dengan jelas.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara** pada tempat yang disediakan dan **tanda tangani Buku Ujian tanpa menuliskan nama Saudara.**

KETENTUAN DAN PROSEDUR KEBERATAN SOAL UJIAN PAI

1. **Peserta dapat memberikan sanggahan soal, jawaban atau keluhan kepada Komisi Ujian dan Kurikulum selambat-lambatnya 10 hari setelah akhir periode ujian.**
2. Semua pengajuan keberatan soal dialamatkan ke **sanggahan.soal@aktuaris.or.id.**
3. Pengajuan keberatan soal setelah tanggal tersebut (Poin No 1) tidak akan diterima dan ditanggapi.

1. Diketahui:

- i. Sampel dari besar kerugian adalah sebagai berikut

600	700	900
-----	-----	-----

- ii. Tidak ada informasi yang tersedia untuk besar kerugian ≤ 500
 iii. Besar kerugian diasumsikan berdistribusi eksponensial dengan mean θ

Tentukan besar θ menggunakan metode *Maximum Likelihood* (cari angka dengan pembulatan terdekat)

- A. 233
 B. 400
 C. 500
 D. 733
 E. 1.233

2. Diketahui:

- i. Banyaknya klaim mengikuti distribusi Poisson dengan mean λ
 ii. Observasi selain 0 dan 1 telah dihapus dari data
 iii. Data berisi jumlah pengamatan yang sama untuk observasi 0 dan 1

Tentukan besar λ menggunakan metode *Maximum Likelihood* (cari angka dengan pembulatan terdekat)

- A. 0,75
 B. 1,00
 C. 1,25
 D. 1,50
 E. 1,80

3. Pada suatu portofolio polis asuransi kendaraan bermotor, diketahui bahwa

- i. Banyaknya klaim untuk masing-masing pemegang polis berdistribusi *Poisson* bersyarat
 ii. Di tahun 1, didapati data sebagai berikut

Banyak Klaim	Banyak Pemegang Polis
0	2.000
1	600
2	300
3	80
4	20
Total	3.000

Hitung faktor kredibilitas, Z , pada tahun ke 2!

- A. $< 0,30$
- B. $0,30 \leq Z < 0,35$
- C. $0,35 \leq Z < 0,40$
- D. $0,40 \leq Z < 0,45$
- E. $\geq 0,45$

4. Diberikan sampel acak dari suatu observasi sebagai berikut:

0,1	0,2	0,5	0,7	1,3
-----	-----	-----	-----	-----

Anda akan mengetest suatu hipotesis bahwa fungsi peluang kepadatannya adalah

$$f(x) = \frac{4}{(1+x)^5}, x > 0$$

Tentukan nilai statistik dari uji *Kolmogorov-Smirnov*

- A. Kurang dari 0,05
- B. Lebih dari sama dengan 0,05, namun kurang dari 0,15
- C. Lebih dari sama dengan 0,15, namun kurang dari 0,25
- D. Lebih dari sama dengan 0,25, namun kurang dari 0,35
- E. Lebih dari 0,35

5. Diketahui:

- i. Frekuensi klaim tahunan suatu asuransi kebakaran mengikuti distribusi *Poisson* dengan rata-rata λ
- ii. Distribusi *prior* dari λ memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut :

$$\pi(\lambda) = (0,4) \frac{1}{6} e^{-\frac{\lambda}{6}} + (0,6) \frac{1}{12} e^{-\frac{\lambda}{12}}, \lambda > 0$$

Terhadap satu pemegang polis, 10 klaim berhasil diobservasi di tahun pertama. Hitung ekspektasi *Bayesian* banyaknya klaim di tahun 2

- A. 9,6
- B. 9,7
- C. 9,8
- D. 9,9
- E. 10,0

6. Diketahui:

- i. Banyaknya klaim tahunan pada suatu polis memiliki distribusi *geometric* dengan parameter β .
- ii. Distribusi *prior* dari β memiliki fungsi kepadatan *Pareto*:

$$\pi(\beta) = \frac{\alpha}{(\beta + 1)^{\alpha+1}}, \quad 0 < \beta < \infty$$

Dengan α adalah konstanta diketahui lebih besar dari 2. Secara acak dipilih polis yang memiliki x klaim di tahun 1.

Tentukan estimasi kredibilitas *Bühlmann* atas banyaknya klaim dari polis yang terpilih di tahun kedua.

- A. $\frac{1}{\alpha-1}$
- B. $\frac{\alpha-1}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$
- C. x
- D. $\frac{x+1}{\alpha}$
- E. $\frac{x+1}{\alpha-1}$

7. Sebuah sampel acak berukuran n diambil dari distribusi dengan fungsi kepadatan peluang

$$f(x) = \frac{\theta}{(\theta+x)^2}, \quad 0 < x < \infty, \theta > 0$$

Hitung variansi asimtotik dari *maximum likelihood estimator* θ

- A. $\frac{3\theta^2}{n}$
- B. $\frac{1}{3n\theta^2}$
- C. $\frac{3}{n\theta^2}$
- D. $\frac{n}{3\theta^2}$
- E. $\frac{1}{3\theta^2}$

8. Untuk setiap pemegang polis asuransi, besar kerugian X_1, \dots, X_n , bersyarat Θ , saling bebas dan identik dengan rata-rata

$$\mu(\theta) = E[X_j | \Theta = \theta], j = 1, 2, \dots, n$$

dan variansi

$$v(\theta) = Var[X_j | \Theta = \theta], j = 1, 2, \dots, n.$$

Diketahui

- i. *Bühlmann credibility* mengestimasi X_5 berdasarkan X_1, \dots, X_4 adalah $Z = 0.4$
- ii. Nilai ekspektasi dari proses variansi ialah 8

Hitung $Cov(X_i, X_j), i \neq j$

- A. $-\frac{1}{3}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{2}{3}$
- D. $\frac{4}{3}$
- E. 2

9. Diberikan informasi sebagai berikut :

- i. Banyaknya klaim oleh individu dalam suatu tahun memiliki distribusi binomial dengan parameter $m = 4$ dan q
- ii. Distribusi prior dari q memiliki fungsi kepadatanpeluang

$$\pi(q) = 6q(1 - q), 0 < q < 1$$
- iii. Sebanyak dua klaim terjadi di tahun tersebut

Tentukan modus dari distribusi *posterior* q

- A. 0,17
- B. 0,33
- C. 0,50
- D. 0,67
- E. 0,83

10. Sebuah perusahaan asuransi telah menentukan standard kredibilitas penuh fluktuasi terbatas sebanyak 2.000 klaim dengan kondisi:

- i. Total banyaknya klaim berada dalam range 3% dari nilai benar (*true value*) dengan peluang p
- ii. Banyaknya klaim memiliki distribusi Poisson

Standard tersebut diubah sehingga total besar klaim berada dalam range 5% dari nilai benar dengan peluang p , dimana besar klaim (*claim severity*) memiliki fungsi kepadatan peluang s

$$f(x) = 1/10.000, 0 \leq x \leq 10.000$$

Dengan menggunakan *limited fluctuation credibility*, hitung ekspektasi banyak klaim yang dibutuhkan untuk mendapatkan kredibilitas penuh dalam standard yang baru

- A. 720
- B. 960
- C. 2.160
- D. 2.667
- E. 2.880

11. Besaran klaim memiliki fungsi distribusi

$$F(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{100}\right)^2, & 0 \leq x \leq 100 \\ 1, & x > 100 \end{cases}$$

Sebuah perusahaan asuransi membayar 80% dari besar kerugian diluar (*in-excess of*) *deductible* sebesar 20, dengan syarat maksimum pembayaran 60 per kerugian.

Hitung ekspektasi bersyarat pembayaran klaim, jika diberikan bahwa pembayaran telah dilakukan.

- A. 37
- B. 39
- C. 43
- D. 47
- E. 49

12. Peubah acak N memiliki distribusi gabungan.

- i. Dengan peluang p , N memiliki distribusi binomial dengan $q = 0,5$ dan $m = 2$
- ii. Dengan peluang $1-p$, N memiliki distribusi binomial dengan $q = 0,5$ dan $m = 4$

Persamaan berikut yang tepat untuk $Pr(N = 2)$ adalah

- A. $0,125p^2$
- B. $0,375 + 0,125p$
- C. $0,375 + 0,125p^2$
- D. $0,375 - 0,125p^2$
- E. $0,375 - 0,125p$

13. Distribusi kejadian atas 84 polis yang dipilih secara acak sebagai berikut :

Banyaknya kejadian	Banyaknya polis
0	32
1	26
2	12
3	7
4	4
5	2
6	1
Total	84

Dengan menghitung rata-rata dan variansi sampel data di atas, pilihlah model berikut yang paling merepresentasikan data diatas

- A. *Negatif Binomial*
- B. *Discrete Uniform*
- C. *Poisson*
- D. *Binomial*
- E. *Antara Poisson atau Binomial*

14. Diketahui:

- i. Fungsi peluang dari banyaknya klaim adalah

$$p(x) = \binom{m}{x} q^x (1-q)^{m-x}, \quad x = 0, 1, \dots, m$$
- ii. Nilai aktual banyaknya klaim harus berada dalam 1% dari ekspektasi banyaknya klaim dengan peluang 0,95
- iii. Ekspektasi banyaknya klaim untuk kredibilitas penuh adalah 34.574

Tentukan nilai q

- A. 0,05
- B. 0,10
- C. 0,20
- D. 0,40
- E. 0,80

15. Diketahui:

- i. Frekuensi banyaknya klaim mengikuti distribusi *Poisson* dengan rata-rata λ
- ii. Severity klaim mengikuti distribusi lognormal dengan parameter μ dan σ .
- iii. Frekuensi banyaknya klaim dan nilai severity klaim saling bebas
- iv. Distribusi prior memiliki fungsi peluang kepadatan gabungan

$$f(\lambda, \mu, \sigma) = 2\sigma, \quad 0 < \lambda < 1, 0 < \mu < 1, 0 < \sigma < 1$$

Hitung standard kredibilitas Buhlmann k untuk *aggregate loss*

- A. 1,69
- B. 2,69
- C. 4,69
- D. 6,69
- E. 8,69

16. Diketahui:

Besar Klaim (X)	Banyak Klaim
(0, 25]	25
(25, 50]	28
(50, 100]	15
(100, 200]	6

Asumsikan setiap besar klaim di atas mengikuti distribusi uniform. Estimasi $E(X^2) - E[(X \wedge 150)^2]$

- A. < 200
- B. Paling sedikit 200, tetapi kurang dari 300
- C. Paling sedikit 300, tetapi kurang dari 400
- D. Paling sedikit 400, tetapi kurang dari 500
- E. Paling sedikit 500

17. Banyaknya klaim mengikuti distribusi negatif binomial dengan parameter β dan r dimana β tidak diketahui dan r diketahui. Misalkan kamu diberikan tugas untuk mengestimasi β dengan jumlah observasi sebanyak n , yang mana diketahui \bar{x} adalah rata-rata dari observasi ini.

Tentukan β dengan metode *maximum likelihood*

- A. \bar{x} / r^2
- B. \bar{x} / r
- C. \bar{x}
- D. $r \bar{x}$
- E. $r^2 \bar{x}$

18. Diberikan:

Banyaknya Klaim	Peluang	Besar Klaim	Peluang
0	1/5		
1	3/5	25	1/3
		150	2/3
2	1/5	50	2/3
		200	1/3

Masing-masing besar klaim ialah saling bebas. Hitung variansi dari kerugian gabungan (aggregate loss)

- A. 4.050
- B. 8.100
- C. 10.500
- D. 12.100
- E. 15.930

19. Diketahui informasi sebagai berikut untuk suatu kelompok pemegang polis :

- i. Besaran klaim berdistribusi seragam tetapi tidak melebihi suatu limit θ
- ii. Distribusi *prior* dari θ ialah

$$\pi(\theta) = \frac{500}{\theta^2}, \theta > 500$$

- iii. Dua klaim saling bebas sebesar 400 dan 600 telah diamati

Hitung peluang bahwa klaim selanjutnya akan lebih besar dari 550. (cari jawaban paling mendekati)

- A. 0,19
- B. 0,22
- C. 0,15
- D. 0,24
- E. 0,31

20. Dari sampel acak berikut ini anda membuat distribusi eksponensial:

1.000	1.400	5.300	7.400	7.600
-------	-------	-------	-------	-------

Hitung koefisien variansi dari estimator rata-rata θ yang didapatkan dengan metode *maximum likelihood*. (Pembulatan 2 desimal)

- A. 0,33
- B. 0,45
- C. 0,15
- D. 1,00
- E. 1,31

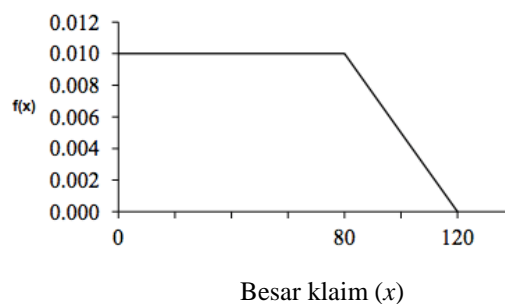
21. Diketahui:

- i. Besaran klaim, X , mempunyai rata-rata μ dan variansi 500
- ii. Variabel acak μ mempunyai rata-rata 1.000 dan variansi 50
- iii. Tiga klaim berikut diamati: 750, 1.075, 2.000

Hitung ekspektasi besaran klaim selanjutnya dengan menggunakan kredibilitas Buhlmann. (cari jawaban paling mendekati)

- A. 1.021
- B. 1.064
- C. 1.042
- D. 1.321
- E. 1.921

22. Diberikan grafik fungsi kepadatan untuk suatu kerugian x sebagai berikut:



Hitung "loss elimination ratio" dari suatu *ordinary deductible* sebesar 20

- A. 0,210
- B. 0,650
- C. 0,015
- D. 0,150
- E. 0,355

23. Seorang aktuaris di perusahaan asuransi membuat model banyaknya klaim dari kejadian "*third party claims*". Aktuaris tersebut menyimpulkan bahwa banyaknya klaim yang diajukan per tahun per pemegang polis mengikuti distribusi Poisson dengan parameter λ , dimana λ mengikuti distribusi Gamma dengan rata-rata 3 dan variansi 3.

Hitung peluang bahwa seorang pemegang polis terpilih secara acak akan mengajukan klaim tidak lebih dari 1 di tahun yang akan datang.

- A. 0,2150
- B. 0,6550
- C. 0,0155
- D. 0,1500
- E. 0,3125

24. Banyaknya klaim kerusakan huru-hara pada suatu bulan di perusahaan asuransi Berjaya Makmur mempunyai rata-rata 110 dan variansi 750. Besar kerugian mempunyai rata-rata 1.101 dan standar deviasi 70. Banyaknya klaim dan besar kerugian adalah saling bebas.

Menggunakan pendekatan distribusi normal, hitung peluang bahwa jumlah aggregate kerugian kerusakan huru-hara yang dilaporkan pada suatu bulan akan kurang dari 100.000

- A. 0,24
- B. 0,62
- C. 0,05
- D. 0,35
- E. 0,29

25. Agen asuransi Sunarto tidak akan menerima bonus tahunannya apabila rasio dari besar kerugian terhadap premium yang telah didapatkan (*earned premium*) untuk portofolio asuransinya ialah 60% atau lebih di tahun ini. Jika rasio besar kerugian tersebut kurang dari 60%, Sunarto akan menerima bonus berupa persentase dari *earned premium* yang telah didupakannya yaitu 15% dari selisih antara rasionya dan 60%. *Annual earned premium* Sunarto ialah sebesar 800.000 (ribu rupiah). Besar kerugian berdistribusi Pareto, dengan $\theta = 500.000$ dan $\alpha = 2$.

Hitung ekspektasi nilai bonus yang akan didapatkan oleh Sunarto (jawaban paling mendekati)

- A. 12.500
- B. 62.240
- C. 55.150
- D. 35.265
- E. 29.150

26. Diketahui:

- Total klaim rawat jalan asuransi kesehatan X diketahui dapat dimodelkan melalui distribusi Pareto dua parameter $\alpha = 2; \theta = 500$.
 - Asuransi kesehatan X mulai merencanakan memberikan insentif finansial berupa 50% dari total klaim, apabila total klaim kurang dari 500 (dalam juta rupiah).
 - Bonus tidak akan diberikan apabila total klaim lebih dari 500.
 - Saat ini total klaim rawat jalan diketahui dapat dimodelkan dengan distribusi Pareto yang baru dengan parameter $\alpha = 2; \theta = K$.
 - Nilai ekspektasi total klaim ditambah dengan ekspektasi bonus dengan model terbaru diketahui sama dengan nilai ekspektasi total klaim dari model yang lama
- Hitung nilai K ! (pilih angka terdekat)

- A. 222
- B. 354
- C. 550
- D. 155
- E. 250

27. Suatu distribusi “compound” Poisson mempunyai $\lambda = 5$ dan besar kerugian mengikuti distribusi sebagai berikut :

x	$p(x)$
100	0,80
500	0,16
1000	0,04

Hitung peluang bahwa nilai *aggregate* klaim akan tepat sebesar 600. (Pilih angka dengan pembulatan paling dekat)

- A. 3,0%
- B. 2,6%
- C. 6,0%
- D. 1,5%
- E. 8,5%

28. Suatu sampel dari 2.000 polis asuransi didapatkan 1.600 polis tanpa klaim dan 400 polis dengan sedikitnya 1 kali klaim. Dengan menggunakan pendekatan distribusi normal, tentukan symmetric 95% selang kepercayaan bagian atas untuk peluang bahwa satu polis mempunyai sedikitnya 1 klaim

- A. 0,2175
- B. 0,1175
- C. 0,0008
- D. 0,3185
- E. 0,2575

29. Suatu sampel terdiri 2,000 klaim terdiri dari sebagai berikut:

- 1.700 observasi yang tidak lebih besar dari 6.000
- 30 observasi diantara 6.000 dan 7.000
- 270 observasi yang lebih besar dari 7.000

Diketahui bahwa total jumlah klaim dari 30 observasi diantara 6.000 dan 7.000 ialah 200.000. Nilai dari $E(X \wedge 6.000)$ untuk distribusi empirikal yang berasosiasi dengan 2.000 observasi ini ialah 1.810. Hitung distribusi empirikal dari $E(X \wedge 7.000)$

- A. 1.755
- B. 1.855
- C. 1.955
- D. 2.055
- E. 2.555

30. Seorang aktuaris mengamati lima buah besaran klaim : 11,0; 15,2; 18,0; 21,0; dan 25,8.

Tentukan parameter μ dari fungsi kepadatan dibawah ini:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp \left[-\frac{1}{2x} (x - \mu)^2 \right], x, \mu > 0$$

- A. 12,64
- B. 17,64
- C. 14,54
- D. 12,85
- E. 16,74

NORMAL DISTRIBUTION TABLE

Entries represent the area under the standardized normal distribution from $-\infty$ to z , $\Pr(Z < z)$

The value of z to the first decimal is given in the left column. The second decimal place is given in the top row.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Values of z for selected values of $\Pr(Z < z)$							
z	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
$\Pr(Z < z)$	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995

A.2.3.1 Pareto (Pareto Type II, Lomax)— α, θ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} & F(x) &= 1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha \\
E[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(k+1) \Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}, & -1 < k < \alpha \\
E[X^k] &= \frac{\theta^k k!}{(\alpha-1) \cdots (\alpha-k)}, & \text{if } k \text{ is an integer} \\
\text{VaR}_p(X) &= \theta[(1-p)^{-1/\alpha} - 1] \\
\text{TVaR}_p(X) &= \text{VaR}_p(X) + \frac{\theta(1-p)^{-1/\alpha}}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\
E[X \wedge x] &= \frac{\theta}{\alpha-1} \left[1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha-1} \right], & \alpha \neq 1 \\
E[X \wedge x] &= -\theta \ln \left(\frac{\theta}{x+\theta} \right), & \alpha = 1 \\
E[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(k+1) \Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)} \beta[k+1, \alpha-k; x/(x+\theta)] + x^k \left(\frac{\theta}{x+\theta} \right)^\alpha, & \text{all } k \\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}$$

A.3.2.1 Gamma— α, θ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x \Gamma(\alpha)} & F(x) &= \Gamma(\alpha; x/\theta) \\
M(t) &= (1 - \theta t)^{-\alpha}, & t < 1/\theta & & E[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, & k > -\alpha \\
E[X^k] &= \theta^k (\alpha+k-1) \cdots \alpha, & \text{if } k \text{ is an integer} \\
E[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+k; x/\theta) + x^k [1 - \Gamma(\alpha; x/\theta)], & k > -\alpha \\
&= \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1) \theta^k \Gamma(\alpha+k; x/\theta) + x^k [1 - \Gamma(\alpha; x/\theta)], & k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= \theta(\alpha-1), & \alpha > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}$$

A.5.1.1 Lognormal— μ, σ (μ can be negative)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) = \phi(z)/(\sigma x), & z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma} & & F(x) &= \Phi(z) \\
E[X^k] &= \exp(k\mu + k^2\sigma^2/2) \\
E[(X \wedge x)^k] &= \exp(k\mu + k^2\sigma^2/2) \Phi\left(\frac{\ln x - \mu - k\sigma^2}{\sigma}\right) + x^k [1 - F(x)] \\
\text{mode} &= \exp(\mu - \sigma^2)
\end{aligned}$$

A.3.3.1 Exponential— θ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{-x/\theta}}{\theta} & F(x) &= 1 - e^{-x/\theta} \\
M(t) &= (1 - \theta t)^{-1} & E[X^k] &= \theta^k \Gamma(k+1), \quad k > -1 \\
E[X^k] &= \theta^k k!, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\text{VaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) \\
\text{TVaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) + \theta \\
E[X \wedge x] &= \theta(1 - e^{-x/\theta}) \\
E[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(k+1) \Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k > -1 \\
&= \theta^k k! \Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}$$

A.3.3.2 Inverse exponential— θ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\theta e^{-\theta/x}}{x^2} & F(x) &= e^{-\theta/x} \\
E[X^k] &= \theta^k \Gamma(1-k), \quad k < 1 \\
\text{VaR}_p(X) &= \theta(-\ln p)^{-1} \\
E[(X \wedge x)^k] &= \theta^k G(1-k; \theta/x) + x^k (1 - e^{-\theta/x}), \quad \text{all } k \\
\text{mode} &= \theta/2
\end{aligned}$$

A.3.2.3 Weibull— θ, τ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau(x/\theta)^\tau e^{-(x/\theta)^\tau}}{x} & F(x) &= 1 - e^{-(x/\theta)^\tau} \\
E[X^k] &= \theta^k \Gamma(1+k/\tau), \quad k > -\tau \\
\text{VaR}_p(X) &= \theta[-\ln(1-p)]^{1/\tau} \\
E[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(1+k/\tau) \Gamma[1+k/\tau; (x/\theta)^\tau] + x^k e^{-(x/\theta)^\tau}, \quad k > -\tau \\
\text{mode} &= \theta \left(\frac{\tau-1}{\tau} \right)^{1/\tau}, \quad \tau > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}$$

B.2.1.1 Poisson— λ

$$\begin{aligned}
p_0 &= e^{-\lambda}, \quad a=0, \quad b=\lambda & p_k &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\
E[N] &= \lambda, \quad \text{Var}[N] = \lambda & P(z) &= e^{\lambda(z-1)}
\end{aligned}$$

B.2.1.2 Geometric— β

$$\begin{aligned}p_0 &= \frac{1}{1+\beta}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = 0 & p_k &= \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}} \\E[N] &= \beta, \quad \text{Var}[N] = \beta(1+\beta) & P(z) &= [1 - \beta(z-1)]^{-1}.\end{aligned}$$

This is a special case of the negative binomial with $r = 1$.

B.2.1.3 Binomial— q, m , ($0 < q < 1$, m an integer)

$$\begin{aligned}p_0 &= (1-q)^m, \quad a = -\frac{q}{1-q}, \quad b = \frac{(m+1)q}{1-q} \\p_k &= \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m \\E[N] &= mq, \quad \text{Var}[N] = mq(1-q) & P(z) &= [1 + q(z-1)]^m.\end{aligned}$$

B.2.1.4 Negative binomial— β, r

$$\begin{aligned}p_0 &= (1+\beta)^{-r}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = \frac{(r-1)\beta}{1+\beta} \\p_k &= \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)\beta^k}{k!(1+\beta)^{r+k}} \\E[N] &= r\beta, \quad \text{Var}[N] = r\beta(1+\beta) & P(z) &= [1 - \beta(z-1)]^{-r}.\end{aligned}$$
