PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA

UJIAN PROFESI AKTUARIS

MATA UJIAN	: A70 – Pemodelan dan Teori Risiko
TANGGAL	: 23 Juni 2015
JAM	: 12.30 – 15.30 WIB
LAMA UJIAN	: 180 Menit
SIFAT UJIAN	: Tutup Buku

2015

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

TATA TERTIB UJIAN

1. Setiap Kandidat harus berada di ruang ujian selambat-lambatnya 15 (lima belas) menit sebelum ujian dimulai.
2. Kandidat yang datang 1 (satu) jam setelah berlangsungnya ujian dilarang memasuki ruang ujian dan mengikuti ujian.
3. Kandidat dilarang meninggalkan ruang ujian selama 1 (satu) jam pertama berlangsungnya ujian.
4. Setiap kandidat harus menempati bangku yang telah ditentukan oleh Komisi Penguji.
5. Buku-buku, diktat, dan segala jenis catatan harus diletakkan di tempat yang sudah ditentukan oleh Pengawas, kecuali alat tulis yang diperlukan untuk mengerjakan ujian dan kalkulator.
6. Setiap kandidat hanya berhak memperoleh satu set bahan ujian. Kerusakan lembar jawaban oleh kandidat, tidak akan diganti. Dalam memberikan jawaban, lembar jawaban harus dijaga agar tidak kotor karena coretan. Lembar jawaban pilihan ganda tidak boleh diberi komentar selain pilihan jawaban yang benar.
7. Kandidat dilarang berbicara dengan/atau melihat pekerjaan kandidat lain atau berkomunikasi langsung ataupun tidak langsung dengan kandidat lainnya selama ujian berlangsung.
8. Kandidat dilarang menanyakan makna pertanyaan kepada Pengawas ujian.
9. Kandidat yang terpaksa harus meninggalkan ruang ujian untuk keperluan mendesak (misalnya ke toilet) harus meminta izin kepada Pengawas ujian dan setiap kali izin keluar diberikan hanya untuk 1 (satu) orang. Setiap peserta yang keluar tanpa izin dari pengawas maka lembar jawaban akan diambil oleh pengawas dan dianggap telah selesai mengerjakan ujian.
10. Alat komunikasi (telepon seluler, pager, dan lain-lain) harus dimatikan selama ujian berlangsung.
11. Pengawas akan mencatat semua jenis pelanggaran atas tata tertib ujian yang akan menjadi pertimbangan diskualifikasi.
12. Kandidat yang telah selesai mengerjakan soal ujian, harus menyerahkan lembar jawaban langsung kepada Pengawas ujian dan tidak meninggalkan lembar jawaban tersebut di meja ujian.
13. Kandidat yang telah menyerahkan lembar jawaban harus meninggalkan ruang ujian.
14. Kandidat dapat mengajukan keberatan terhadap soal ujian yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai kepada komisi penguji selambat-lambatnya 10 (sepuluh) hari setelah akhir periode ujian.

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

PETUNJUK MENGERJAKAN SOAL

Ujian Pilihan Ganda

1. Setiap soal akan mempunyai 4 (empat) atau 5 (lima) pilihan jawaban di mana hanya 1 (satu) jawaban yang benar.
2. Setiap soal mempunyai bobot nilai yang sama dengan tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.
3. Berilah tanda silang pada jawaban yang Saudara anggap benar di lembar jawaban. Jika Saudara telah menentukan jawaban dan kemudian ingin merubahnya dengan yang lain, maka coretlah jawaban yang salah dan silang jawaban yang benar.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara pada** tempat yang sediakan dan **tanda tangani lembar jawaban tersebut tanpa menuliskan nama Saudara.**

Ujian Soal Esay

1. Setiap soal dapat mempunyai lebih dari 1 (satu) pertanyaan, Setiap soal mempunyai bobot yang sama kecuali terdapat keterangan pada soal.
2. Tuliskan jawaban Saudara pada Buku Jawaban Soal dengan jelas, rapi dan terstruktur sehingga akan mempermudah pemeriksaan hasil ujian.
3. Saudara bisa mulai dengan soal yang anda anggap mudah dan tuliskan nomor jawaban soal dengan soal dengan jelas.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara** pada tempat yang disediakan dan **tanda tangani Buku Ujian tanpa menuliskan nama Saudara**.

KETENTUAN DAN PROSEDUR KEBERATAN SOAL UJIAN PAI

1. **Peserta dapat memberikan sanggahan soal, jawaban atau keluhan kepada Komisi Ujian dan Kurikulum selambat-lambatnya 10 hari setelah akhir periode ujian.**
2. Semua pengajuan keberatan soal dialamatkan ke **sanggahan.soal@aktuaris.org.**
3. Pengajuan keberatan soal setelah tanggal tersebut (Poin No 1) tidak akan diterima dan ditanggapi.

1. Sebuah distribusi Gamma memiliki rata-rata/ (“mean”) = 8 dan skewness = 1. Hitung Variansinya?
   a. 12
   b. 16
   c. 61
   d. 8

Pernyataan dibawah digunakan untuk menjawab soal untuk no 2-5

Data berikut merupakan waktu meninggal yang sudah di sensor dari kanan /”right censoring” (+) untuk 25 orang

2,3,3,3+,4,4,4,4,4+,5+,6,6,7,7,7,7+,7+,8,9,10,12+,13,13,14,16 merupakan sampel acak dari waktu sampai meninggal ~ **T**

2. Hitung $S_{25}(11) - \hat{S}(11)$ menggunakan Estimasi Kaplan Meier – Nelson Aalen !
   a. -0,032
   b. 0,032
   c. 0
   d. -0,32
3. Hitung Estimasi “product limit” dari $P[4 \leq T \leq 8]$!
   a. 0,3444
   b. 0,4644
   c. 0,0452
   d. 0,6442
4. Hitung Estimasi “product limit” untuk probabilitas terkondisi $P[T > 8 \,|T > 4]$!
   a. 0,5125
   b. 0,8553
   c. 0,5835
   d. 0,5385

5. Anggap bahwa data terakhir di waktu ke-16 adalah sensor bukan meninggal. Hitung $S_{25}(20)$ dengan "geometric extension approximation"!
   a. 0,29
   b. 0,39
   c. 0,093
   d. 0,039
6. Suatu kumpulan risiko mengikuti distribusi eksponensial dengan rataan ("mean") 1.000. Terdapat deduktibel sebesar 500. Tentukan besar deduktibel yang harus ditingkatkan untuk meningkatkan "the loss elimination ratio" sebesar dua kali lipat!
   a. 1.546
   b. 1.841
   c. 1.232
   d. 1.989
7. Suatu kumpulan risiko memiliki rataan ("mean") 2.000. Dengan deduktibel 1.000, "the loss elimination ratio" ialah 0,3. Peluang bahwa suatu risiko lebih besar dari 1,000 ialah 0,4. Tentukan rataan besar suatu risiko apabila diberikan suatu risiko dengan besar lebih kecil atau sama dengan 1.000!
   a. 2.250
   b. 333
   c. 1.250
   d. 233
8. Suatu portofolio klaim memliki fungsi distribusi kumulatif $F(x) = \left(\frac{x}{100}\right)^2$. Suatu asuransi akan membayar 80% dari jumlah kerugian klaim tersebut apabila nilai klaim lebih dari standar deduktibel ("ordinary deductible") sebesar 20. Maksimum nilai pembayaran ialah 60 per klaim. Tentukan nilai ekspetasi dari pembayaran kerugian tersebut, apabila suatu pembayaran telah di-bayarkan!
   Hint : suatu klaim/kerugian dibayarkan apabila nilai pembayaran klaim tsb lebih dari deduktibel
   a. 21,17
   b. 23,81
   c. 38,91
   d. 39,31

9. Seorang analisis dimintakan bantuan untuk menganalisis pola perilaku warga kota dalam mengkonsumsi rokok. Dinas perkotaan ABC memberikan informasi seperti tabel di bawah ini yang berupa distribusi dari banyaknya batang rokok yang dikonsumsi selama satu hari kerja :

	Pria	**Wanita**
Rataan/"mean"	6	3
Variansi	64	31

Banyaknya pekerja pria pada suatu perusahaan dalam studi ini yang dipilih secara acak memiliki distribusi binomial (n, p) dengan paramater N dan $p = 0{,}4$. Tentukan rataan ("mean") dan juga standar variansi dari banyaknya batang rokok yang dihabiskan dalam satu hari kerja pada perusahaan tersebut yang berisi 8 orang pekerja!

a. Rataan = 33,36 dan Variansi = 19,26
b. Rataan = 23,36 dan Variansi = 22,86
c. Rataan = 33,36 dan Variansi = 12,66
d. Rataan = 13,66 dan Variansi = 12,66

10. Suatu perusahaan reasuransi menawarkan skema program reasuransi stop-loss. Dalam program ini, perusahaan akan memberikan ganti rugi apabila secara aggregat jumlah kerugian melebihi suatu nilai d, dan menerima premium sebesar $[E(S-d)_+]$. Anda diberikan data historikal yaitu $[E(S-100)_+] = 15, [E(S-120)_+] = 10$ dan peluang bahwa secara aggregate jumlah kerugian lebih besar dari 80 dan kurang dari 120 ialah 0. Tentukan peluang bahwa aggregate besar kerugian kurang dari atau sama dengan 80!
a. Tidak ada jawaban benar
b. 0,75
c. 0,25
d. 0,85

11. Peubah acak S diketahui memiliki distribusi "Compound Poisson" dengan karakteristik sebagai berikut :

    1. Besar klaim individual X ialah sama untuk 1,2, atau 3
    2. $E(S) = 56$
    3. $Var(S) = 126$
    4. $\lambda = 29$

    Tentukan eskpetasi untuk besar klaim = 1, 2, dan 3 (f_1, f_2, f_3) !
    Hint : $f_i = Pr(X = i)$

    a. Tidak ada jawaban benar
    b. $f_1 = \frac{10}{29}, f_2 = \frac{8}{29}, f_3 = \frac{11}{29}$
    c. $f_1 = \frac{10}{29}, f_2 = \frac{11}{29}, f_3 = \frac{8}{29}$
    d. $f_1 = \frac{8}{29}, f_2 = \frac{10}{29}, f_3 = \frac{11}{29}$

Pernyataan dibawah digunakan untuk menjawab soal untuk no 12-15

Suatu model statistik "individual losses" diketahui memiliki distribusi gamma dengan paramater $\alpha = 2$ dan $\theta = 100$. Banyaknya klaim mengikuti distribusi binomial negatif dengan $\tau = 2$ dan $\beta =$ 1,5. Untuk setiap kerugian, berlaku deduktibel standard ("ordinary deductible) ialah 50 dan loss limit dari besar klaim sebelum dipotong deduktibel ialah 175.

12. Hitung rataan ("mean") dari besar aggregate pembayaran klaim "per-loss basis"?
    a. 251.012
    b. 215.125
    c. 215.158
    d. 259.401
13. Hitung variansi dari besar aggregate pembayaran klaim "per-loss basis"?
    a. 62.616
    b. 69.526
    c. 26.162
    d. 66.616
14. Tentukan koefisien paramater distribusi dari banyaknya pembayaran (binomial negatif (τ^*, β^*)!
    a. $\tau^* = 4$ dan β^* =2,66969
    b. $\tau^* = 2$ dan β^* =1,36469
    c. $\tau^* = 4$ dan β^* =1,36469
    d. $\tau^* = 2$ dan β^* =2,66969

15. Tentukan fungsi distribusi kumulatif dari suatu besar klaim Y^p dari suatu pembayaran klaim diberikan pembayaran klaim tersebut dibayarkan!
    Hint : suatu klaim/kerugian dibayarkan apabila nilai pembayaran klaim tsb lebih dari deduktibel

    a. $F_{Y^p}(y) = \left(1 + \frac{y}{150}\right) e^{\frac{y}{100}}$
    b. $F_{Y^p}(y) = 1 - \left(1 + \frac{y}{150}\right) e^{-\frac{y}{100}}$
    c. $F_{Y^p}(y) = 1 - \left(\frac{y}{150}\right) e^{\frac{y}{100}}$
    d. $F_{Y^p}(y) = 1 + \left(\frac{y}{150}\right) e^{-\frac{y}{100}}$

16. Sebagai bahan dalam merancang suatu produk asuransi “nursing home insurance”, seorang aktuaris diberikan data bahwa rata-rata lama hari dari suatu kunjungan ialah 440 hari, dan 30% dari kunjungan tersebut akan dibatalkan pada 30 hari pertama. Pembatalan/Terminasi ini diketahui berdistribusi secara uniform pada periode tersebut. Setelah pembicaran dengan divisi bisnis, disepakati polis tersebut dijual sebesar 20 ribu per hari untuk 30 hari pertama, dan 100 ribu per hari setelahnya. Tentukan ekspetasi besar klaim yang akan dibayarkan perusahaan asuransi tersebut untuk satu kali kunjungan? (hitung ke pembulatan terdekat!)
    a. 42 juta
    b. 22 juta
    c. 12 juta
    d. 44 juta

17. Diberikan informasi sebagai berikut :
    a) X adalah suatu peubah acak dengan rataan μ dan variansi ν
    b) μ adalah suatu peubah acak dengan rataan sebesar 2 dan variansi sebesar 4
    c) ν adalah suatu peubah acak dengan rataan sebesar 8 dan variansi sebesar 32

    Tentukan nilai dari faktor kredibiitas Buhlmann Z setelah tiga observasi dari X !
    a. 0,6
    b. 0,8
    c. 0,3
    d. 0,4

Pernyataan dibawah digunakan untuk menjawab soal untuk no 18-19

Diberikan informasi sebagai berikut :

a) Banyaknya klaim untuk suatu tertanggung mengikuti distribusi Poisson dengan mean M
b) Besar suatu klaim mempunyai distribusi eksponensial dengan distribusi kepadatan peluang

$$f_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda^{-1} e^{-x/\lambda}, x\ , \lambda > 0$$

c) $M\ dan\ \Lambda$ saling bebas
d) $E(M) = 0{,}10$ dan $Var(M) = 0{,}0025$
e) $E(\Lambda) = 1.000$ dan $Var(\Lambda)$= 640.000
f) Banyak klaim dan besar klaim saling bebas

18. Hitung nilai ekspetasi dari “pure premium’s process variance” dari satu risiko tersebut!

    a. 828.000
    b. 188.000
    c. 228.000
    d. 328.000

19. Hitung “variance of the Hypothetical Mean” untuk premi murni (“pure premium”)!

    a. 10.500
    b. 5.500
    c. 2.500
    d. 3.500

20. Dua jenis risiko dipilih secara acak dari suatu populasi. Risiko pertama, mempunyai 0 klaim pada tahun pertama, 0 buah klaim pada tahun kedua, 1 klaim pada tahun ketiga, dan 0 klaim pada tahun terakhir : (0,0,1,0). Risiko kedua, mempunyai 2 klaim pada tahun pertama, 1 klaim pada tahun kedua, 0 dan 2 klaim pada dua tahun terakhir (2,1,0,2). Hitung estimatasi bobot kredilitas (“credibility weighted estimates”) untuk ekspetasi banyak klaim per tahun untuk setiap risiko $\widehat{\mu\,(\theta_1)}$ dan $\widehat{\mu\,(\theta_2)}$?

    a. $\widehat{\mu\,(\theta_1)}$ = 0,3128 dan $\widehat{\mu\,(\theta_2)}$ = 1,1842
    b. $\widehat{\mu\,(\theta_1)}$ = 0,5348 dan $\widehat{\mu\,(\theta_2)}$ = 1,1021
    c. $\widehat{\mu\,(\theta_1)}$ = 0,3851 dan $\widehat{\mu\,(\theta_2)}$ = 1,1420
    d. $\widehat{\mu\,(\theta_1)}$ = 0,3958 dan $\widehat{\mu\,(\theta_2)}$ = 1,1042

Pernyataan dibawah digunakan untuk menjawab soal untuk no 21-25

Sebuah perusahaan konstruksi A dan B mempunyai polis asuransi yang melindungi kendaraan truk niaga milik mereka. Dalam empat tahun, aktuaris perusahaan mengobservasi historikal catatan klaim seperti berikut :

		Tahun			
Tertanggung		***Y***	***Y+1***	***Y+2***	***Y+3***
A	Banyak Klaim	3	2	2	0
	Total Kendaraan	2	2	2	1
B	Banyak Klaim	2	1	0	
	Total Kendaraan	4	3	2	

21. Hitung “Expected Value of The Process Variance” (EPV) !

    a. 0,4562
    b. 0,1282
    c. 0,2281
    d. 0,3367

22. Hitung “Variance of the Hypothetical Means” (VHM)!
    a. 0,1757
    b. 0,2821
    c. 0,8132
    d. 0,1639

23. Hitung estimasi frekuensi banyak klaim tahunan untuk setiap tertanggung menggunakan Model the Buhlmann-Straub!
    a. A = 0,9139 dan B = 0,3882
    b. A = 0,9225 dan B = 0,1242
    c. A = 0,3242 dan B = 0,3212
    d. Tidak ada jawaban benar

24. Apabila diasumsikan banyaknya klaim untuk setiap tertanggung mengikuti distribusi Possion, Hitung “Expected Value of The Process Variance” (EPV) !
    a. 0,115
    b. 0,525
    c. 0,625
    d. Tidak ada jawaban benar

25. Apabila diasumsikan banyaknya klaim untuk setiap tertanggung mengikuti distribusi Possion, Hitung “Variance of the Hypothetical Means” (VHM)!
    a. 0,1429
    b. 0,2321
    c. 0,3212
    d. Tidak ada jawaban benar

26. Dua buah mangkuk masing-masing terdapat 10 bola kecil. Mangkuk pertama berisi 5 bola merah dan 5 bola putih. Mangkuk kedua berisi 2 bola merah dan 8 bola putih. Proses pemilihan adalah memilih mangkuk secara acak dan kemudian memilih bola secara acak dari mangkuk yang dipilih. Berapa probabilitias dari bola yang dipilih adalah warna merah !
    a. 0,15
    b. 0,75
    c. 0,35
    d. Tidak ada jawaban benar

27. Suatu populasi dari suatu risiko memiliki distribusi Pareto dengan $\theta = 6.000$ dan $\alpha =$ tidak diketahui. Hasil dari simulasi menggunakan estimasi MLE berdasarkan suatu sampel berukuran n = 10 mengindikasikan $E(\hat{\alpha}) = 2,2$ dan $MSE(\hat{\alpha}) = 1$. Tentukan $Var(\hat{\alpha})$ jika diketahui bahwa $\alpha = 2$!

    a. 0,78
    b. 0,25
    c. 0,96
    d. Tidak ada jawaban benar

28. Diketahui persentil ke-20 dan ke-80 dari suatu sampel acak adalah 5 dan 12. Menggunakan metode "the percentile matching", Hitung estimasi $S(8)$ dengan mengansumsikan bahwa sampel tersebut berdistribusi Weibull!

    a. 0,5249
    b. 0,2324
    c. 0,8235
    d. Tidak ada jawaban benar

29. Pada tahun pertama, terdapat 100 klaim dengan rataan ("mean") besar klaim = 10.000 dan di tahun kedua terdapat 200 klaim dengan rataan besar klaim = 12.500. Karena adanya pengaruh inflasi, besar klaim meningkat sebesar 10% per tahun. Sebuah distribusi Pareto dengan $\alpha = 3$ dan $\theta =$ tidak diketahui digunakan untuk mengestimasi distibusi dari klaim tersebut.Tentukan θ untuk tahun ketiga menggunakan metode momen!

    a. 54.400
    b. 10.800
    c. 35.200
    d. 26.400

30. Sebuah "credibility factor parsial" untuk sampel acak X berdasarkan 100 exposure dari X adalah Z = 0,4. Berapa tambahan exposure yang diperlukan agar "credibility factornya" dapat ditingkatkan sampai paling tidak 0,5?

    a. 54
    b. 45
    c. 75
    d. 57

DISCRETE DISTRIBUTION

B.2.1.1 Poisson—λ

$$\begin{aligned}
p_0 &= e^{-\lambda}, \quad a = 0, \quad b = \lambda, \\
p_k &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \\
\mathrm{E}[N] &= \lambda, \quad \mathrm{Var}[N] = \lambda, \\
\hat{\lambda} &= \hat{\mu}, \\
P(z) &= e^{\lambda(z-1)}.
\end{aligned}$$

B.2.1.3 Binomial—q, m $(0 < q < 1, m \text{ an integer})$

$$\begin{aligned}
p_0 &= (1-q)^m, \quad a = -\frac{q}{1-q}, \quad b = \frac{(m+1)q}{1-q}, \\
p_k &= \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \\
\mathrm{E}[N] &= mq, \quad \mathrm{Var}[N] = mq(1-q), \\
\hat{q} &= \hat{\mu}/m, \\
P(z) &= [1 + q(z-1)]^m.
\end{aligned}$$

B.2.1.4 Negative binomial—β, r

$$\begin{aligned}
p_0 &= (1+\beta)^{-r}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = \frac{(r-1)\beta}{1+\beta}, \\
p_k &= \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)\beta^k}{k!(1+\beta)^{r+k}}, \\
\mathrm{E}[N] &= r\beta, \quad \mathrm{Var}[N] = r\beta(1+\beta), \\
\hat{\beta} &= \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\mu}} - 1, \quad \hat{r} = \frac{\hat{\mu}^2}{\hat{\sigma}^2 - \hat{\mu}}, \\
P(z) &= [1 - \beta(z-1)]^{-r}, \quad -(1+1/\beta) < z < 1 + 1/\beta.
\end{aligned}$$

CONTINUOUS DISTRIBUTION

A.2.3.1 Pareto—α, θ (Pareto Type II, Lomax)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}, \\
F(x) &= 1-\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha, \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta[(1-p)^{-1/\alpha}-1], \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -1<k<\alpha, \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k k!}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)} \quad \text{if } k \text{ is a positive integer}, \\
\mathrm{E}[X\wedge x] &= \frac{\theta}{\alpha-1}\left[1-\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha-1}\right], \quad \alpha\neq 1, \\
\mathrm{E}[X\wedge x] &= -\theta\ln\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right), \quad \alpha=1, \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= \mathrm{VaR}_p(X)+\frac{\theta(1-p)^{-1/\alpha}}{\alpha-1}, \quad \alpha>1, \\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}\beta[k+1,\alpha-k;x/(x+\theta)] \\
&\quad +x^k\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha, \quad k>-1,
\end{aligned}
$$

A.3.2.1 Gamma—α, θ (When $\alpha = n/2$ and $\theta = 2$, it is a chi-square distribution with n degrees of freedom.)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)}, \\
F(x) &= \Gamma(\alpha;x/\theta), \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k>-\alpha, \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k(\alpha+k-1)\cdots\alpha \quad \text{if } k \text{ is a positive integer}, \\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+k;x/\theta)+x^k[1-\Gamma(\alpha;x/\theta)], \quad k>-\alpha, \\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\theta^k\Gamma(\alpha+k;x/\theta) \\
&\quad +x^k[1-\Gamma(\alpha;x/\theta)] \quad \text{if } k \text{ is a positive integer},
\end{aligned}
$$

A.3.2.3 Weibull—θ, τ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau(x/\theta)^\tau e^{-(x/\theta)^\tau}}{x}, \\
F(x) &= 1 - e^{-(x/\theta)^\tau}, \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta[-\ln(1-p)]^{1/\tau}, \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k\Gamma(1+k/\tau), \quad k > -\tau, \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k\Gamma(1+k/\tau)\Gamma[1+k/\tau; (x/\theta)^\tau] + x^k e^{-(x/\theta)^\tau}, \quad k > -\tau,
\end{aligned}$$

A.3.3.1 Exponential—θ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{-x/\theta}}{\theta}, \\
F(x) &= 1 - e^{-x/\theta}, \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= -\theta\ln(1-p), \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k\Gamma(k+1), \quad k > -1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k k! \quad \text{if } k \text{ is a positive integer}, \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= \theta(1 - e^{-x/\theta}), \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= -\theta\ln(1-p) + \theta, \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k > -1, \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k k!\Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta} \quad \text{if } k > -1 \text{ is an integer},
\end{aligned}$$

A.5.1.1 Lognormal—μ,σ (μ can be negative)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2) = \phi(z)/(\sigma x), \quad z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}, \\
F(x) &= \Phi(z), \\
\mathrm{E}[X^k] &= \exp\left(k\mu + \tfrac{1}{2}k^2\sigma^2\right), \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \exp\left(k\mu + \tfrac{1}{2}k^2\sigma^2\right)\Phi\left(\frac{\ln x - \mu - k\sigma^2}{\sigma}\right) + x^k[1 - F(x)],
\end{aligned}$$